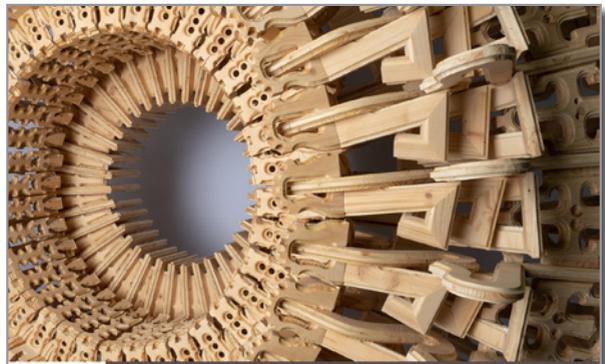


Lena Ackermann, Renate Delucchi Danhier,  
Sabrina Heiderich, Stephan Hußmann und Barbara Mertins

## Begabung in Sprache und Mathematik relational testen (Be\_SMart)

Wahrnehmungsmuster und Strategien begabter  
Schülerinnen und Schüler aus psycholinguistischer  
und mathematikdidaktischer Perspektive

---



Stephan Hußmann, Barbara Welzel (Hrsg.)

### DoProfil – Das Dortmunder Profil für inklusionsorientierte Lehrerinnen- und Lehrerbildung

WAXMANN

Stephan Hußmann,  
Barbara Welzel (Hrsg.)

### DoProfil – Das Dortmunder Profil für inklusionsorientierte Lehrerinnen- und Lehrerbildung

2018, 304 Seiten, br., 39,90 €,  
ISBN 978-3-8309-3836-1

© Waxmann Verlag GmbH, 2018



WAXMANN

Steinfurter Str. 555  
48159 Münster

Fon 02 51 – 2 65 04-0  
Fax 02 51 – 2 65 04-26

info@waxmann.com  
order@waxmann.com

www.waxmann.com  
Mehr zum Buch [hier](#).

Lena Ackermann, Renate Delucchi Danhier, Sabrina Heiderich,  
Stephan Hußmann und Barbara Mertins

## Begabung in Sprache und Mathematik relational testen (Be\_SMart)

### Wahrnehmungsmuster und Strategien begabter Schülerinnen und Schüler aus psycholinguistischer und mathematikdidaktischer Perspektive

#### 1 Ausgangslage und Zielperspektive

„Begabung ist Fähigkeit zu wertvollen Handlungen“  
(Feger & Prado, 1998, S. 30f.).

Im Rahmen des *Dortmunder Profils für inklusionsorientierte Lehrerinnen- und Lehrerbildung* (DoProfil) ist ein Kooperationsprojekt zwischen der Psycholinguistik und Mathematikdidaktik der TU Dortmund entstanden, das Begabung als eine Heterogenitätsdimension in DoProfil an der Schnittstelle zwischen Mathematik und Sprache erforscht: **Begabung in Sprache und Mathematik relational testen (Be\_SMart)**. Unter einer kompetenzorientierten statt defizitorientierten Perspektive auf Lernen sollen Wahrnehmungs- und Begründungsmuster von Lernenden mit Begabungspotenzial in Mathematik und Sprache im Kontrast zu anderen Lernenden identifiziert werden. Dazu werden im ersten Schritt Potenziale zum mathematischen Lerngegenstand des algebraischen Denkens und seiner sprachlichen Verarbeitung untersucht. Ziel ist es, in einem experimentellen Design das kognitive Profil von mathematischer und sprachlicher Begabung mit Hilfe der Eye-Tracking-Methode in Kombination mit qualitativen Interviews zu durchleuchten und spezifische Wahrnehmungsmuster sowie Lösungsstrategien der untersuchten Lernendengruppen besser zu verstehen. So werden experimentell gestützte Grundlagen zu verschiedenen Begabungsausprägungen geschaffen und die Schnittstelle zwischen Sprachverarbeitung und Mathematik mithilfe experimenteller Methoden untersucht.

Auf der Grundlage der identifizierten spezifischen Denk- und Handlungsmuster der überdurchschnittlich Begabten werden in einem zweiten Schritt des Projekts fachdidaktische Unterstützungsmöglichkeiten einerseits für die begabten und andererseits für alle anderen Schülerinnen und Schüler entwickelt. Perspektivisch sollen so zum einen neue, differenzierte und auch sprachlich adaptierte Aufgabenformate für alle Lernenden erarbeitet werden; zum anderen sollen diese als fachdidaktischer Lerngegenstand auf Hochschulebene in der Lehrerinnen- und Lehrerbildung implementiert werden.

Mit dem Beitrag soll das Projekt hinsichtlich seiner Zielstellungen zur Grundlagenforschung vorgestellt und dabei auf die mathematikdidaktische und die psycholinguistische Perspektive und ihre Verknüpfungen eingegangen werden. Dabei werden erste Eindrücke und Tendenzen der Eye-Tracking-Studie sowie der diagnostischen Interviews

präsentiert. Abschließend werden die nächsten Forschungsaktivitäten und die geplante Implementation der Befunde im Rahmen von DoProfiL vorgestellt.

## 2 Theoretische Grundlagen

Für den Begriff *Begabung* verweisen Feger und Prado (1998, S. 29) auf mehr als 100 verschiedene Begriffsbestimmungen. Der Terminus wird uneinheitlich, unpräzise und oftmals synonym zu anderen Begriffen wie Talent, Leistungsstärke, Kreativität, Fähigkeit oder Intelligenz gebraucht (vgl. Behrensen & Solzbacher, 2016). Dass es keine allgemein anerkannte Definition von Begabung gibt, spiegelt verschiedene Positionen und Annahmen zur Entstehung und Entwicklung von Begabung wider. Zunächst wird die Perspektive auf dieses Konstrukt im Allgemeinen und dann in Bezug auf das hier vorgestellte Kooperationsprojekt umrissen. Die anschließende Beschreibung des ausgewählten Lerngegenstands knüpft unmittelbar an die eingenommene Perspektive an.

### 2.1 Heterogenitätsdimension der Begabung

Als begabt können Menschen gelten, die bereits hervorragende Leistungen erbracht haben (Performanzdefinition), oder eine Begabung kann laut der vor allem in der differentiellen Psychologie prominenten Definition des Intelligenzquotienten (IQ) denjenigen zugeschrieben werden, die einen bestimmten Grenzwert der Intelligenz, meistens einen IQ ab 130 für Hochbegabte, überschreiten (vgl. Holling & Kanning, 1999, S. 5).

Etwa zwei Prozent der Bevölkerung haben einen sehr hohen IQ über 130 (vgl. Bundesministerium für Bildung und Forschung, 2015, S. 18). Personen ab diesem Wert wird eine Hochbegabung und ab einem IQ von 115 eine Begabung attestiert. Dabei wird die Einzelleistung mit dem Mittelwert (von 100) der entsprechenden Altersklasse in Beziehung gesetzt. Um diesen gering erscheinenden Anteil von 2 Prozent der intellektuellen Spitze absolut greifbar zu machen, lässt sich folgende Schätzung (in Anl. an Ulm, 2009) vornehmen: Deutschland hat aktuell etwa 82 Millionen Einwohner (d.h. 1,64 Millionen Menschen gelten statistisch als hochbegabt). Etwa 11 Millionen Schülerinnen und Schüler sind an allgemeinbildenden und beruflichen Schulen (d.h. 220.000 Lernende mit einem IQ ab 130). Etwa ein Drittel eines Jahrgangs besuchen das Gymnasium. Zusammen mit der Prämisse, dass Hochbegabte zum größten Teil als gymnasialtauglich eingestuft werden und sich damit ein Anteil von etwa 6 Prozent hochbegabter Gymnasiasien ergibt, haben etwa 60 Lernende *eines* Gymnasiums (mit einer Schülerzahl von 1000) einen IQ ab 130. Berücksichtigt man die statistische Grenze zur Begabung bei 115, so wird diese Zahl noch beträchtlich größer. Dies macht deutlich, dass die Anzahl hochbegabter Schülerinnen und Schüler zwar klein, aber keinesfalls unbedeutend ist. Das in diesem Artikel beschriebene Projekt diskutiert, wie sich das Potenzial dieser Lernenden für alle Lernenden nutzbar machen lässt.

In der mathematikdidaktischen Forschung wird diese einseitige Begabungsdefinition kritisch diskutiert, denn auch Lernende ohne einen IQ über 130 können überdurch-

schnittliche mathematische Leistungen zeigen. Insbesondere zeigen sich Unterschiede zwischen Probandinnen und Probanden mit einer allgemeinen intellektuellen Begabung und einer mathematischen Begabung immer dann, wenn die gewählten Problemstellungen auf einen spezifischen mathematischen Lerngegenstand bezogen sind (vgl. Fritzlar, 2013).

## 2.2 Forschung an der Schnittstelle zwischen Sprache und Mathematik

Das Ziel dieses Projekts ist langfristig, das Begabungspotenzial an der Schnittstelle zwischen Sprache und Mathematik zu untersuchen. Aus diesem Grund wird von Anfang an versucht, einen nicht fachbezogenen Begabungsbegriff herauszuarbeiten. So wird dieser Begriff als ein umfassendes Konstrukt über die statusdiagnostische Perspektive hinaus als ein „Zusammenspiel von vielen inneren und äußeren Faktoren [verstanden], die im richtigen Moment am richtigen Ort zusammenfließen“ (Preckel & Baudson, 2013, S. 20). Dabei spielen personenbezogene (innere) wie auch sozial gesetzte und situationsspezifische (äußere) Konstrukte eine Rolle. Zentral sind kognitive Faktoren (z.B. Arbeitsgedächtnis), meta-kognitive (z.B. Wissen über Strategien, vgl. Sternberg, 2000) sowie affektive Faktoren (z.B. Selbstkonzept, Motivation, vgl. Benölken, 2011, 2014), wobei zwischen Kompetenz (als Potenzial zu überdurchschnittlicher Leistung) und Performanz (als dem beobachtbaren Auftreten besonderer Leistungen) unterschieden wird, so dass man Begabung als leistungsbezogenes Potenzial charakterisieren kann (vgl. Preckel & Baudson, 2013, S. 10). Mit dem in Be\_SMart entwickelten Design werden reichhaltige (mathematisch-sprachliche) Situationen bereitgestellt. Damit wird für die Probandinnen und Probanden die Möglichkeit geschaffen, überdurchschnittliche Lösungsstrategien sichtbar zu machen (vgl. Prediger & Schnell, 2017, S. 146). Der Forschungsfokus liegt auf der kognitiven Performanz mit dem Ziel kognitive Potenziale aufzudecken.

Neben dem in 2.1 dargelegten unimodalen Verständnis von Begabung, wird in vielen Arbeiten angenommen, dass Begabung nur für einen bestimmten Wissensbereich vorliegt. So wird eine Person z.B. auf eine logisch-mathematische oder eine sprachlich-künstlerische Begabung eingegrenzt (vgl. Gardner, 1983: Modell der multiplen Intelligenzen). Im Rahmen der Zusammenarbeit von Psycholinguistik und Mathematikdidaktik liegt der Forschungsschwerpunkt hingegen auf dem Zusammenspiel von sprachlicher und mathematischer Begabung. Das bedeutet, dass weder eine bereichsspezifische noch bereichsübergreifende Begabung unterstellt wird, sondern die Potenziale in ihrem Wechselspiel empirisch erforscht werden. Da eine solche interaktive Perspektive selten oder gar nicht bei der Erforschung von Begabung eingenommen wurde, wird zunächst ein Überblick über den derzeitigen Forschungsstand zu dem Thema Begabung aus den hier jeweils relevanten Forschungsperspektiven skizziert. Das Ziel ist anschließend jedoch, interdisziplinär vorzugehen, um beide Perspektiven in ihrer Interaktion zu nutzen und im Hinblick auf den Forschungsgegenstand zu vereinen.

Die Psycholinguistik untersucht mithilfe von experimentellen Methoden kognitive Zustände und Vorgänge des sprachlichen Wissens, des Spracherwerbs, der Sprachproduktion und des Sprachverstehens sowie ablaufende Prozesse bei vorliegenden Sprachstörungen (vgl. Dietrich & Gerwien, 2017). Es ist plausibel anzunehmen, dass jede Art

von Begabung durch sprachliche Verarbeitungsmechanismen beeinflusst werden kann (vielleicht auch vice versa). Es ist daher erstaunlich, dass es zu diesem Thema, insbesondere zur sprachlichen Begabung, noch keine systematische psycholinguistische Forschung gibt. Aus diesem Grund wird im Folgenden allgemein auf die Rolle der Sprache in ihrer Bedeutung für das Lernen und die Entwicklung von Begabungen eingegangen.

Damit eine Begabung in einem Wissensbereich überhaupt entstehen kann, ist es unabdingbar, dass die betroffene Person bereichsspezifische und auch -übergreifende Konzepte und Begriffe verstanden hat. Sprache als Lernmedium (vgl. Prediger, 2013) trägt ihren wesentlichen Teil zur Erfassung dieser Konzepte bei. Prediger und Wessel (2011) sind z.B. der Auffassung, dass ein verständnisorientierter Zugang zur Mathematik nur durch das Meistern der ineinandergreifenden sprachlichen und mathematischen Herausforderungen gelingen kann (vgl. ebd., S. 180).

In der Schule kommen zur Erfassung fachlicher Konzepte neben der Alltagssprache auch die fachspezifischen sprachlichen Besonderheiten des jeweiligen Faches, wie z.B. die Formel- oder Symbolsprache in der Mathematik (vgl. Prediger, 2013), zum Tragen. Die Bildungssprache ist dabei erst seit den letzten Jahren nicht nur Lernmedium, sondern auch Lerngegenstand (vgl. Meyer & Prediger, 2012).

In der Mathematik werden keine konkreten physischen Phänomene behandelt, sondern es werden Eigenschaften und Anwendungsmöglichkeiten von abstrakten Objekten, Beziehungen und Prozessen untersucht. Diese Objekte sind abstrakte Begriffe, denen eine konventionalisierte Bedeutung zugrunde liegt. Die Begriffe werden über sprachliche Aussagen geschaffen und weiterentwickelt. Kognition und Kommunikation gehen dabei Hand in Hand (vgl. Meyer & Tiedemann, 2017, S. 42). Vygotsky (1964, S. 303) geht sogar davon aus, dass die Sprache das mathematische Denken erst ermögliche: Die sprachliche Äußerung sei dabei nicht das Abbild eines fertigen Gedankens, der Gedanke strukturiere sich erst im Zuge der Sprachproduktion und vollziehe sich auf diese Weise. Demzufolge kann man davon ausgehen, dass Begabte, die in den mathematischen Aufgaben extrem gut abschneiden, auf überdurchschnittlich gute sprachliche Fähigkeiten mühelos zurückgreifen können, da Sprache nicht als Hindernis, sondern als zusätzliche Informationsquelle genutzt werden kann.

Der spezifische Fokus in Be\_SMart liegt auf den Fähigkeiten zum Strukturieren bzw. zum Erkennen von Mustern und Gesetzen, zum Verallgemeinern und zum Anwenden vorhandener Muster und Gesetze in neuen Situationen. Diese Fähigkeiten lassen sich bereichsspezifisch verstehen, sie sind aber auch bereichsübergreifend evident, sowohl für mathematisch sowie für sprachlich Begabte. Da in Be\_SMart keine Vorannahmen über die Bereichsspezifität getroffen werden, ist das Design so gestaltet, dass die zur Verfügung gestellten Anforderungssituationen eine Interaktion von unterschiedlichen Begabungspotenzialen ermöglichen soll.

## 2.3 Auswahl des Lerngegenstands: Algebraisches Denken in Bilder- und Zahlenfolgen

Algebraisches Denken gilt als Kern mathematischen Denkens. Während Mathematik als ein Denken in Mustern und Strukturen bezeichnet wird (vgl. Matter, 2017), so versteht man unter Algebra das Darstellen und Analysieren dieser Muster und Strukturen. Dazu wird eine Symbolsprache verwendet, die es gestattet, Terme und Gleichungen zu bilden und regelgeleitet umzuformen. Die Algebra durchzieht deshalb die Schulcurricula wie einen roten Faden. In der Primarstufe wird der Grundstein zum Übergang von der Arithmetik zur Algebra, die sogenannte Frühe Algebra (*Early Algebra*, vgl. Kieran, Pang, Schifter & Ng, 2016), durch das Beschreiben und Darstellen von Gesetzmäßigkeiten gelegt. In den Sekundarstufen I und II zeigt sie sich als eine Art verallgemeinerte Arithmetik explizit im Zusammenhang mit Variablen, Termen, Gleichungen und Gleichungssystemen. Eine herausfordernde Hürde im Übergang von der Arithmetik zur Algebra besteht darin, „die prozessuale Idee der Ergebnisorientierung in der Arithmetik zugunsten der Beschreibung von Objekten und deren Beziehungen [in der Algebra] zu überwinden“ (Hußmann & Schacht, 2015, S. 114). Diese Übergänge, an denen sich die Entwicklung von algebraischem Denken zeigt, sind durch vielfältige Denkprozesse gekennzeichnet, wie

- das Nachdenken über das Allgemeine anhand von Besonderheiten,
  - das regelgeleitete Nachdenken über Muster,
  - das relationale Nachdenken über Größen, Zahlen und Rechnungen,
  - das Nachdenken über Relationen in Problemaufgaben mithilfe von Repräsentationen,
  - das konzeptuelle Nachdenken über Prozedurales,
  - das Vorhersagen, Vermuten, Begründen,
  - das Gestikulieren, Visualisieren, Versprachlichen,
- (vgl. Meyer, 2015, S. 18ff.).

Diese Denkprozesse bilden die Grundlage für vertieftes algebraisches Tätigsein. „[G]eneralisation appears to be a major determiner of growth in algebraic thinking and preparation for later learning of algebra“ (Cooper & Warren, 2008, S. 25). Damit stehen mit dem Lerngegenstand der Algebra genau die Denkhandlungen im Fokus, die relevant für die Schnittstelle zwischen Mathematik und Sprache sind: das *Strukturieren* (als das Hineinsehen oder Schaffen einer Ordnung oder Gliederung) und das *Verallgemeinern* (als das Herleiten eines allgemeinen Zusammenhangs bzw. als das Erfassen des allen Gemeinsamen) (vgl. Lengnink & Prediger, 2000).

Mit der Entwicklung der mathematischen Denk- und Handlungsmuster geht die Entwicklung sprachlicher Fähigkeiten einher. So werden beim Strukturieren nicht nur neue Denkobjekte geschaffen, sondern zugleich die entsprechenden sprachlichen Mittel genutzt und entwickelt. Auch das Verallgemeinern ist ohne die entsprechenden sprachlichen Übergänge nicht möglich (vgl. Prediger & Krägeloh, 2015). Daher ist der Lerngegenstand des algebraischen Denkens an Bilder- und Zahlenfolgen besonders gut für die Interaktion von mathematischen und sprachlichen Begabungspotenzialen geeignet. Dies soll an der nachfolgenden Tabelle exemplarisch illustriert werden.

*Bilderfolgen sprachlich und mathematisch algebraisieren*

Die Bilderfolge in Tabelle 1 zeigt Strukturierungsmöglichkeiten und Stufen des Verallgemeinerns auf einer sprachlichen und auf einer formal-symbolischen Darstellungsebene. Im ersten Schritt muss das Einzelbild strukturiert werden, um die Gemeinsamkeiten als Strukturierungsmerkmal auf die Bilderfolge zu übertragen. Dieses identifizierte Strukturierungsmerkmal bildet wiederum die Grundlage dafür, Vorhersagen für weitere Folgeglieder zu treffen und eine allgemeine Vorschrift für jede beliebige Stelle zu formulieren. Die zwei angeführten Beispiele zeigen, dass man unter verschiedenen Strukturierungsstrategien und Perspektiven zu verschiedenen verallgemeinerten sprachlichen Aussagen bzw. symbolischen Formalisierungen kommen kann.

Im ersten Beispiel wird vom Muster im Einzelbild auf das Muster der Bilderfolge und von einer sprachlichen, an der bildlichen Struktur orientierten Beschreibung hin zu einer symbolischen Beschreibung verallgemeinert. Dabei verändert sich die Funktion der verwendeten Zahlen: Von der Anzahl an einer konkreten Stelle zur Beschreibung eines spezifischen Musters eines Bildes (z.B.  $4 + 4 \cdot 3$  im dritten Bild) hin zur Verwendung einer Unbestimmten für das Muster der Bilderfolge ( $4 + 4 + n$ ). Die so entwickelte Vorschrift ermöglicht die Bestimmung von Anzahlen an beliebigen Stellen, weil sie den direkten Zusammenhang zwischen Stelle und Bild herstellt. Besondere Herausforderung ist die Identifizierung von festen und variablen Bestandteilen als (geometrisch konstituierte, in Tab. 1 in Beispiel 1 markierte) Bündelungen zwischen Einzelbild und Bilderfolge.

Tabelle 1: Beispielhafte Strukturierungen und Verallgemeinerungen einer Bilderfolge

<b>Strukturierung durch Markierung eines Musters</b>		
<b>Verbale/ Symbolische Darstellung der Einzelmuster</b>	1. Bild: vier und vier Punkte/ $4 + 4$ 2. Bild: vier Punkte und vier mal zwei Punkte/ $4 + 4 \cdot 2$ 3. Bild: vier Punkte und vier mal drei Punkte/ $4 + 4 \cdot 3$ ...	Das erste Bild enthält acht Punkte/ 8
<b>Verbale/ Symbolische Darstellung des Musters an der 5. Stelle</b>	Vier Eckpunkte und vier mal fünf Punkte/ $4 + 4 \cdot 5$	Es kommen vier mal vier Punkte zu den anfänglichen Acht dazu, an jeder Seite einer/ $8 + 4 \cdot 4$
<b>Verallgemeinerung durch verbale/ symbolische Darstellung des Musters an der n-ten Stelle</b>	Das sind immer vier Eckpunkte und an jeder Seite sind zusätzlich immer so viele Punkte wie die Stelle des Bildes/ $4 + 4 \cdot n$	Es kommen immer eins weniger als die Stelle mal vier Punkte zu den anfänglichen Acht hinzu/ $8 + (n - 1) \cdot 4$

Das zweite Beispiel fokussiert auf einen Zuwachs von Bild zu Bild (Veränderung von einem „Vorgänger“ zu seinem „Nachfolger“) und auf die anfängliche Anzahl an Punkten im ersten Bild. Hier richtet sich der Fokus direkt auf die Bilderfolge. So muss nur auf das geachtet werden, was zum Anfangszustand dazukommt, und nicht auf die Struktur des Einzelbildes im Zusammenhang mit der gesamten Bilderfolge.

Lannin (2005) differenziert zwei Typen des Verallgemeinerns im algebraischen Denken: eine rekursive und eine explizite. Während bei der rekursiven Vorgehensweise Veränderungen nur bei den Folgegliedern betrachtet werden (*single variance*), müssen bei einer expliziten Strategie Stellen und Folgeglieder miteinander in Beziehung gesetzt und ihre gemeinsame Veränderung betrachtet werden (*covariance*). Letztere beschreibt eine zentrale Grundvorstellung funktionalen Denkens (vgl. Confrey & Smith, 1991, Malle 2000). Im Rahmen von Be\_SMart wird zwischen drei Verallgemeinerungstypen unterschieden: rekursiv, explizit und kombiniert explizit/rekursiv.

Während im ersten Beispiel ein *expliziter* Zusammenhang zwischen Stelle und Bild verallgemeinert wird, wird im zweiten Beispiel die *rekursive* Änderung zwischen Vorgänger und Nachfolger mit dem Anfangszustand und der Anzahl dieser Änderung im *expliziten* Zusammenhang mit der Stelle *kombiniert*. Bei einer rein *rekursiven* Verallgemeinerung wird nur die Änderung zwischen den Folgegliedern betrachtet, was die Kenntnis des jeweiligen Vorgängers notwendig macht (Vorgänger + 4).

Die rein rekursive Vorgehensweise macht somit keine weitere Verallgemeinerung notwendig, lässt aber auch keine direkte Anzahlbestimmung an einer beliebigen Stelle zu. Sobald die Stelle einbezogen wird, stellt sich das Problem, die beliebige bzw.  $n$ -te Stelle sprachlich und mathematisch in den Griff zu bekommen. In Be\_SMart ist dies eine der zentralen Gelenkstellen, an der wir interessante Befunde erwarten.

### *Zahlenfolgen sprachlich und mathematisch algebraisieren*

Als eine weitere Darstellungsform zur Beforschung algebraischen Denkens werden Zahlenfolgen (vgl. Tab. 2) genutzt, bei denen die verschiedenen Verallgemeinerungstypen ebenso zum Tragen kommen, wobei vor allen Dingen auf Zahlenebene gearbeitet werden muss. Im Unterschied zur Bilderfolge werden hier in der Regel die Muster durch Verwendung von Rechenoperationen hineingelesen. Die unterschiedlichen Verallgemeinerungstypen werden in Tabelle 2 beispielhaft verdeutlicht.

Tabelle 2: Beispielhafte Verallgemeinerungen zur Zahlenfolge 4, 9, 14, 19, ...

(1) Von einer Zahl zur nächsten sind es immer Fünf mehr/	Vorgänger + 5 (rekursiv)
(2) Es ist immer fünf Mal die Stelle abzüglich Eins/	$5 \cdot n - 1$ (explizit)
(3) Man startet im ersten Bild bei Vier und es kommen bei jedem weiteren Bild immer Fünf hinzu/	$4 + (n - 1) \cdot 5$ (kombiniert explizit/rekursiv)

In den gängigen Intelligenztests müssen Regeln und Muster in Zahlenfolgen und Bildern erkannt werden (bspw. CFT20-R, vgl. Preckel & Brüll, 2008). Diese im Kern algebraische Anforderung unterstreicht den besonderen Wert der Algebra für die Beforschung mathematischer Begabung (vgl. Fritzlar, 2013). Der besondere Mehrwert, der durch intensive Verwendung des algebraischen Gegenstands hinzugewonnen wird, ist die Vernetzung der dargebotenen Darstellungen mit zunehmend verallgemeinerbaren sprachlichen und formal-symbolischen Strukturelementen.

## 2.4 Forschungsfragen

Folgende Forschungsfragen stehen im Zentrum des Kooperationsprojektes:

- Welche Wahrnehmungs-, Bearbeitungs- (v.a. erhoben mit ET) und Begründungsmuster (v.a. erhoben mit den Einzelinterviews) sind charakteristisch für mathematisch und sprachlich begabte Lernende der Sekundarstufe I?
- In welcher Hinsicht unterscheiden sich diese von den Vorgehensweisen leistungsschwächerer Lernender?
- Welche Potenziale zeigen sich mit Fokus auf das algebraische Denken bezogen auf das Strukturieren und Verallgemeinern in Bilder- und Zahlenfolgen hinsichtlich expliziter, rekursiver und kombinierter Strategien?

## 3 Empirische Studie: Triangulation quantitativer und qualitativer Forschungsmethoden

Die Entscheidung für eine Verknüpfung quantitativer und qualitativer Methoden liegt „in der komplementären Kompensation der Schwächen und blinden Flecke der jeweiligen Einzelmethode“ (Flick, 2009, S. 44). Im Folgenden werden die Erhebungsmethoden zunächst einzeln beschrieben, dann wird das hier implementierte Design vorgestellt, welches sich die Vorteile der Kombination der beiden Methoden zu Nutze macht.

### 3.1 Eye-Tracking-Methode

Die Methode des Eye-Tracking (ET) stellt ein gängiges Mittel der Erforschung der kognitiven Prozesse in der Psycholinguistik dar. Dabei handelt es sich um ein Blickaufzeichnungsverfahren, welches das visuelle Rezeptionsverhalten einer Probandin bzw. eines Probanden apparativ festhält. Das foveale Sehen ist hierbei von besonderem Interesse (vgl. Bente, 2004, S. 303; vgl. Blake, 2013, S. 369). Es bezieht sich auf den Bereich des höchsten Auflösungsvermögens der menschlichen Netzhaut im Bereich der Sehgrube (fovea centralis) bedingt durch das Vorhandensein einer hohen Anzahl von farbsensiblen Rezeptoren. Im Zentrum der Betrachtung steht also das direkte Anblicken und damit scharfe Sehen von in diesem Fall algebraischen Inhalten. Die Messung erfolgt, indem mittels videobasierter Aufnahmen an einem stationären, ferngesteuerten (remote) ET-Gerät die Positionen der Zentren von Pupille und Cornea-Reflex (Spiegelung eines ausgesendeten Infrarotlichts auf der Hornhaut des Auges) bestimmt und ihre Distanz zueinander in Relation gesetzt werden. Alle Aufnahmen erfolgten in dem ET-Labor des psycholinguistics laboratory (<https://url.tu-dortmund.de/psycholinguistics>) mit Hilfe eines remote Eye-Trackers des Anbieters SMI (SensoMotoric Instruments).

Der Vorteil der ET-Methode liegt in der Sichtbarmachung des visuellen Suchverhaltens der Probandinnen und Probanden bei einem aufgabenbezogenen Schauen (vgl. Bente, 2004, S. 306): Aufmerksamkeitsfokus, visuelle Selektions- und Verarbeitungsprozesse können so identifiziert werden. Da die Blickbewegungen weder der kogniti-

ven Kontrolle noch einer möglichen Manipulation der Probandin bzw. des Probanden unterliegen und damit unmittelbarer sind, kann außerdem von einer Einschränkung des Einflusses des Faktors „soziale Erwünschtheit“ im Verhalten der Teilnehmerinnen und Teilnehmer ausgegangen werden.

### 3.2 Diagnostische Einzelinterviews

Qualitative diagnostische Interviews dienen der „sprachliche[n] Erfassung von Bedeutungsmustern“ (Lamnek, 2005, S. 348). Einblicke in die Wahrnehmungsmuster und Denkprozesse werden über sprachliche Begründungszusammenhänge in konkreten Situationen gewonnen. Der Einsatz halb-standardisierter Interviews soll die spezifischen Potenziale zum algebraischen Denken der Probandinnen und Probanden detailliert erfassen. Mit diagnostischen *Einzelinterviews* sollen individuelle Bedeutungszuschreibungen bei der Strukturierung von Bilder- und Zahlenfolgen und ihren konkreten Verallgemeinerungen rekonstruiert werden. Dabei wird zum lauten Denken (vgl. Konrad, 2010) und zu Handlungen am konkreten Material aufgefordert, um sprachliche Begründungs- und spezifische Handlungsmuster offenzulegen. Die Aussagen der Probandinnen und Probanden werden mithilfe eines sprachanalytischen Ansatzes analysiert (vgl. Hußmann, Schacht & Schindler, angenommen). Aus den expliziten Aussagen der Lernenden, sog. *Festlegungen* (mit denen sie sich *festlegen* und dabei ihre Fokussierungen auf die Aufgabe als Zugänge offenlegen), und deren Begründungszusammenhänge, sog. *inferenzielle Relationen* (die z.B. durch sprachliche Indikatoren wie weil, daher, also, ... zum Vorschein kommen), werden die individuellen Wahrnehmungsmuster und Argumentationsweisen auf Basis zugrundeliegender Konzepte rekonstruiert. Die genutzten individuellen mathematischen Begriffe werden dabei in unmittelbarer Verknüpfung zu ihrer sprachlichen Verwendung gesehen.

### 3.3 Methodenkombination und Design

Die ET-Daten geben einen unmittelbaren Einblick in die hoch automatisierten, unbewussten visuellen Wahrnehmungsmuster sowie in die kognitiven Lösungsstrategien der Probandinnen und Probanden. Gleichzeitig werden Bearbeitungszeiten aufgenommen. Die ET-Daten liefern verschiedene relevante Messgrößen, die auch in ihrer Interaktion untersucht werden können. Diese sind: Anzahl der gerichteten Blicke mit Angabe der Verweildauer und bezogen auf den Blickverlauf. Die diagnostischen Einzelinterviews liefern im Anschluss an die ET-Erhebung die Möglichkeit, durch gezieltes Nachfragen weitere Einblicke in die bewussten Begründungs- und Handlungszusammenhänge am konkreten Material zu erlangen. Mit anderen Worten, die in den ET-Daten erfassten Lösungsstrategien können in den Einzelinterviews mithilfe von sprachlichen Äußerungen und aufgabenbezogenen Handlungen der Probandinnen und Probanden expliziert und aus individueller Perspektive reflektiert und um weitere Informationen anreichert werden. Tabelle 3 zeigt die bisher durchgeführten sowie geplanten Erhebungsphasen.

Tabelle 3: Erhebungszyklen

Experiment & Stichprobe	Methode(n)	Aufgabentypen
<b>1. Phase, Pilot 1:</b> Testung der Eye-Tracking-Folien, N = 7: 3 Mathematikstudierende & 4 Deutschstudierende	<b>Eye-Tracking</b>	<b>Verallgemeinerung innerhalb einer Darstellung:</b> Bilderfolge → Bild Zahlenfolge → Zahl (vgl. bspw. Abb. 1) <b>Verallgemeinerung durch Darstellungswechsel:</b> Bilderfolge → explizite/rekursive Vorschriften (vgl. bspw. Abb. 6) Zahlenfolge → explizite/rekursive Vorschriften
<b>2. Phase, Pilot 2:</b> Testung von Lernendengruppen der Sek I; Testung der Methodenkombination, N = 9: 4 Lernende mit mathematischem Begabungspotenzial (8. – 10. Klasse) & 5 Lernende der Vergleichsgruppe (9. Klasse)	<b>Eye-Tracking</b> 29 Aufgaben (17 Basisaufgaben + 10 + 2 Zusatzaufgaben) <b>&amp; Diagnostisches Interview</b> Letzten 6 der Basisaufgaben	<b>Verallgemeinerung innerhalb einer Darstellung:</b> Bilderfolge → Bild Zahlenfolge → Zahl (vgl. bspw. Abb. 1) <b>Verallgemeinerung durch Darstellungswechsel:</b> Bilderfolge → explizite/rekursive Vorschriften (vgl. bspw. Abb. 6) Zahlenfolge → explizite/rekursive Vorschriften
<b>3. Phase, Geplante Pilot 3:</b> Testung von Lernendengruppen der Sek I zur Finalisierung des Aufgabensettings, N = 6	<b>Eye-Tracking &amp; Diagnostisches Interview</b>	<b>Angepasste Aufgabentypen: Verallgemeinerung durch Darstellungswechsel:</b> Punktebild → Zahlterme Punktebild → sprachliche Beschreibungen Bilderfolge → rekursive/explicite Vorschriften und sprachliche Beschreibungen
<b>4. Phase, Geplantes Experiment:</b> Erhebung von Potenzialen zum algebraischen Denken, N = 30	<b>Eye-Tracking &amp; Diagnostisches Interview</b>	<b>Finale Aufgabentypen</b>

Den Probandinnen und Probanden werden an einem Bildschirm des Eye-Tracker-Geräts Aufgaben mit zu untersuchenden Bilder- und/oder Zahlenfolgen präsentiert, die ohne schriftliche Bearbeitung gelöst werden sollen. Dabei werden die Blickbewegungen aufgenommen. Jede Aufgabe verfügt über dieselbe strukturelle Anordnung: Oben auf dem Bildschirm erscheint eine Fragestellung, in der Mitte Zahlen- und/oder Bilderfolgen. Darunter befinden sich unterschiedliche Antwortmöglichkeiten, zwischen denen die Probandinnen und Probanden auswählen. Nachdem eine Antwort ausgewählt wurde, erscheint auf dem Bildschirm eine Aufforderung zur sprachlichen Begründung der Antwort.

In der ersten Phase (Pilot 1) wurde das gesamte Stimulusmaterial mit zwei Testgruppen – Mathematikstudierende und Nicht-Mathematikstudierende – mit Eye-Tracking getestet, um die experimentelle Eignung des Designs zu überprüfen. In der zweiten Phase (Pilot 2) wurde ein angepasstes Design für Lernende der Sekundarstufe I mit zusätzlicher Methodenkombination durchgeführt. Die Anpassung des Experimentdesigns im Übergang zwischen der ersten und zweiten Phase hatte zum Ziel, eine eindeutige Zuordnung von Blickbewegungen zu Lösungsstrategien vornehmen zu können, bspw.

wurde nur noch eine Folge pro Aufgabe präsentiert. Für die sich anschließenden diagnostischen Einzelinterviews in Pilot 2 wurden nur die Aufgaben verwendet, die auf sprachlich-mathematische Begründungen und auf den Darstellungswechsel fokussieren. In der zweiten Phase nahmen vier Lernende der 8. bis 10. Klasse eines Gymnasiums mit mathematischen Begabungspotenzial teil. Die Kontrollgruppe setzte sich aus fünf Lernenden der 9. Klasse einer Gesamtschule ohne erkennbares<sup>1</sup> Begabungspotenzial zusammen.<sup>2</sup>

## 4 Einblick in das analytische Vorgehen

Im Folgenden werden erste Ergebnisse der zweiten Phase aus dem Eye-Tracking (4.1) und den diagnostischen Interviews (4.2) vorgestellt.

### 4.1 Eye-Tracking-Daten

Es werden zunächst theoretische Grundlagen zur Analyse von ET-Daten dargestellt. Dann werden erste Eindrücke möglicher und zukünftig zu überprüfender gruppenspezifischer Unterschiede illustriert. Zwei Arten der Blickbewegungen sind beim Eye-Tracking von besonderer Relevanz (vgl. Blake, 2013, S. 370):

- *Sakkaden*: Mittels schneller Augenbewegungen werden die Augen foveal immer wieder auf ein neues Ziel ausgerichtet. Dieses Ziel wird meist kurz vor der Neuausrichtung peripher wahrgenommen; es erfolgt dann ein neuer selektiver, visueller Aufmerksamkeitsfokus. Blickpfade können somit nachvollzogen werden.
- *Fixationen*: Sie beziehen sich auf den relativen Stillstand (Verweilen) des Auges. Definierte Stimulusbereiche (die sogenannte kritische Region – *area of interest* (AoI)) werden foveal betrachtet und für eine bestimmte Zeit (in dem hier verwendeten Setup etwa 250 ms) fixiert. Man kann auch sagen, dass eine Fixation das Verweilen des Auges zwischen zwei Sakkaden wiedergibt.

Für die Interpretation der aufgenommenen Blickbewegungen sind zwei grundlegende Annahmen von Bedeutung (vgl. Blake, 2013; Holmqvist, Nyström, Andersson, Dewhurst, Jarodzka & van de Weijer, 2011):

- Von den Fixationen ist ableitbar, welcher Region / welchen Regionen des dargebotenen Stimulus die Probandinnen und Probanden zu einem bestimmten Zeitpunkt ihre kognitiv-visuelle Aufmerksamkeit zuweisen.
- Die Dauer der Fixationen spiegelt die Dauer der kognitiven Verarbeitung der fixierten Regionen wieder. Dieses Maß ist allerdings insofern interpretationsoffen,

---

1 Die Lernenden der Kontrollgruppe fielen im mathematischen und sprachlichen Bereich nicht durch besondere schulische Leistungen auf.

2 Da es sich hier um Pilotierungen handelt, ist die Stichprobe noch sehr klein und nicht umfassend nach eindeutigen Kriterien ausgewählt. Die Zuordnung zur Fokusgruppe erfolgte über die Teilnahme an der Mathematik-Olympiade NRW und die Zuordnung zur Kontrollgruppe basierte auf Vergleichbarkeit in Hinblick auf das Alter.

als es für die Komplexität eines Stimulus stehen kann, da je komplexer ein Stimulus ist (z.B. bezogen auf Pixelauflösung oder inhaltliche Reichhaltigkeit), desto mehr kognitive Aufmerksamkeit wird ihm zuteil. Außerdem kann dies mit dem Probanden/der Probandin *per se* zusammenhängen (z.B. bezogen auf den Expertisegrad oder sprachspezifische Eigenschaften). In diesem Fall gibt die Fixationsdauer das Maß an Interesse für ausgewählte Regionen wieder (vgl. Bente, 2004, S. 301).

Um einen ersten Zugang zu der großen Datenmenge zu gewinnen, wurden in der zweiten Phase (Pilot 2) sogenannte *areas of interest* (AoIs) für die Analysesoftware BeGaze von SMI definiert. Die Stimuli wurden mit AoIs so versehen, dass jeder einzelne Stimulus räumlich in verschiedene AoIs eingeteilt wurde. Blickdaten können dann bezogen auf die definierten AoIs von der Software ausgegeben werden. Abbildung 1 zeigt bei-

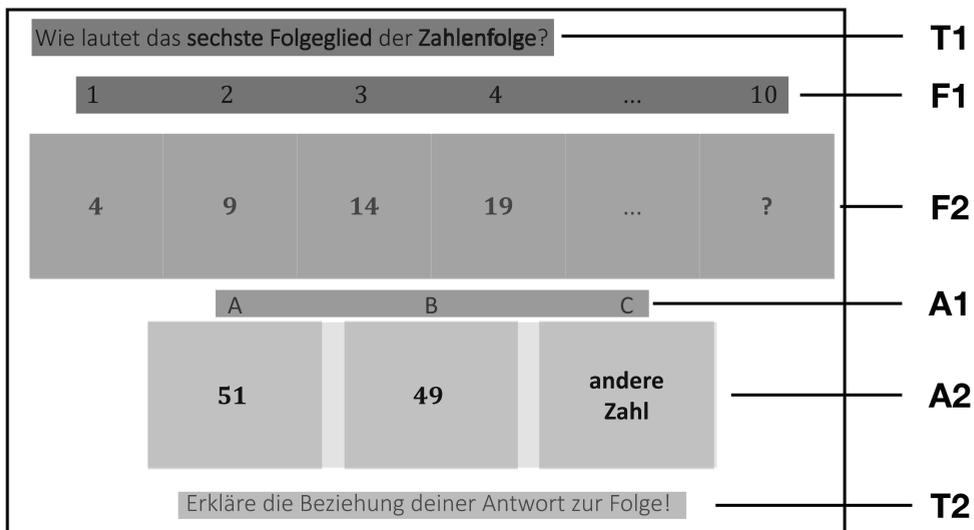


Abbildung 1: Aufgabe mit definierten AoIs für die relevanten strukturellen Elemente

spielhaft eine Aufgabe mit einer Zahlenfolge mit den definierten AoIs (s. in Graustufen gefärbte Rechtecke).

Um die kognitive Verarbeitung in ihrer Anfangsphase erforschen zu können, wurden bei jeder Aufgabe die ersten acht Sekunden des Blickverlaufs analysiert (s. Abb. 2). Zusätzlich wurden die ersten acht Sekunden nach der Antwortauswahl näher in den Blick genommen (s. Abb. 3).

Mittels der Darstellung der von BeGaze erstellten *Sequence Charts* (Abb. 2) lässt sich dies exemplarisch wiedergeben. *Sequence Charts* zeigen die Zeit (in Millisekunden), in der AoIs fixiert werden. Auf der Achse werden die Fixationen jeder Probandin bzw. jedes Probanden AoI-bezogen als aufeinanderfolgende in Graustufen gefärbte Rechtecke dargestellt. Wenn der Blick auf eine nicht durch eine AoI definierte Region fällt, wird dies in der *Sequence Chart* als weißes Feld abgebildet. Zur Klarheit wurden für die *Sequence Charts* die Graustufen aus der Abbildung 1 beibehalten. Abbildung 2 zeigt die *Sequence Charts* für eine Aufgabe mit einer Bilderfolge. Es wird ersichtlich, dass sich die

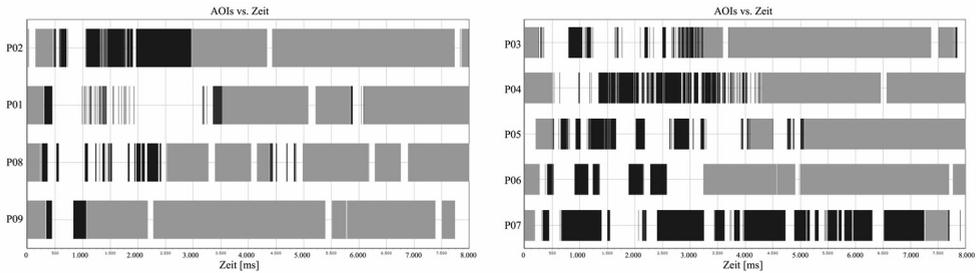


Abbildung 2: *Sequence Charts* des Anfangsstimulus (0,00 – 8,00s) für die Gruppe der Begabten (links) und die Kontrollgruppe (rechts)

Kontrollgruppe deutlich länger mit der Fragestellung befasst (dunkelgraue Felder in der *Sequence Chart*).

Beide Gruppen unterscheiden sich auch in der Regelmäßigkeit und Zielgerichtetheit ihrer Augenbewegungen: Die untersuchten Begabten tätigen viel strukturiertere Blickbewegungen, während die Kontrollgruppe deutlich weniger Muster oder Regelmäßigkeiten

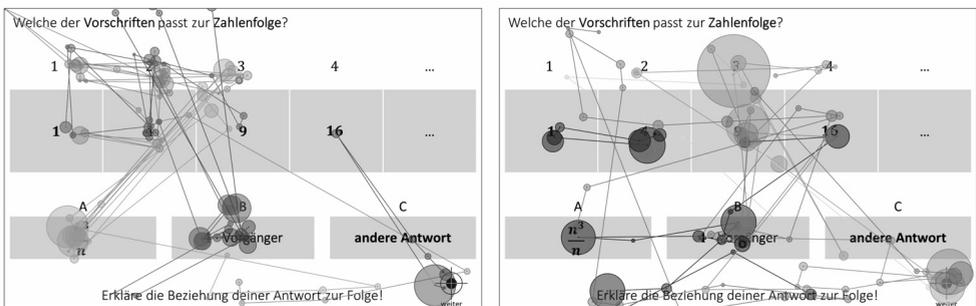


Abbildung 3: *Scan Paths* für den Zeitraum nach der Antwortauswahl (0,00 – 8,00s) für die Begabten (links) und die Kontrollgruppe (rechts): Die Blickbewegungen der Begabten sind intentional, die der Kontrollgruppe unregelmäßig

aufweist und weniger zielgerichtet vorgeht. Dies kann den sogenannten *Scan-Path*-Darstellungen entnommen werden (s. Abb. 3).

*Scan Paths* geben das Blickverhalten im Zeitverlauf wieder. Dabei werden Fixationen durch Kreise dargestellt: Je länger die Fixation, desto größer der Kreis. Die Sakkaden zwischen zwei aufeinanderfolgenden Fixationen werden durch Linien dargestellt, die diese Fixationskreise verbinden. Die Blicke unterschiedlicher Probandinnen und Probanden werden farblich (hier in Graustufen) unterschieden.

Bereits die Betrachtung des Blickverlaufes deutet auf das Erkennen der von den Probandinnen und Probanden angewendeten Strategien. So zeigen die *Scan Paths* in Abbildung 4 Blickbewegungsmuster, die mit unterschiedlichen Lösungsstrategien in Verbindung gebracht werden können: die explizite Strategie der Begabten wird dadurch erkennbar, dass sie die Stellen mit den Folgliedern in Beziehung setzen. Die Kontrollgruppe hingegen geht rekursiv vor: sie schauen von einem Folglied zum nächsten.

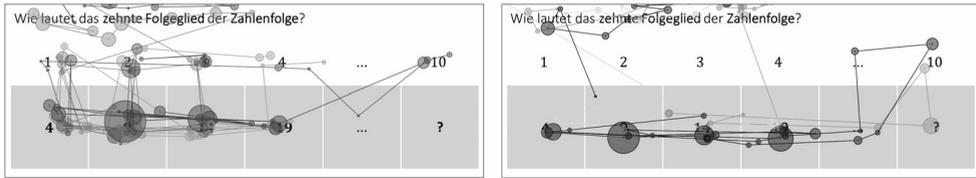


Abbildung 4: *Scan Paths* für den Anfangsstimulus (0,00 – 8,00s) für die Begabten (links) und die Kontrollgruppe (rechts): Die Kontrollgruppe verwendet eine rekursive Strategie, die Begabten berücksichtigen eine explizite

Wertet man die Fixationen beider Gruppen über eine gesamte Aufgabe – hier einer zu deutenden Bilderfolge (vgl. Tab. 1) – mithilfe einer *Focus Map* aus, die ein anfänglich schwarzes Bild an denjenigen Stellen zunehmend sichtbar werden lässt, die fixiert werden, so zeigt sich darüber hinaus, dass die Begabten insgesamt mehr der relevanten Informationen gezielt in den Blick nehmen (vgl. Abb. 5). Insbesondere zeigt sich dies hier bei der richtigen Antwortmöglichkeit des expliziten Terms zur Bilderfolge.

Interessant ist nun, wie die Probandinnen und Probanden die Wahl ihrer Vorgehensweisen begründen und inwiefern sich die herangezogenen Aspekte bei beiden Gruppen unterscheiden. Hier sollen die Einzelinterviews Aufschluss geben, die direkt im Anschluss an die Eye-Tracking-Erhebung geführt werden.

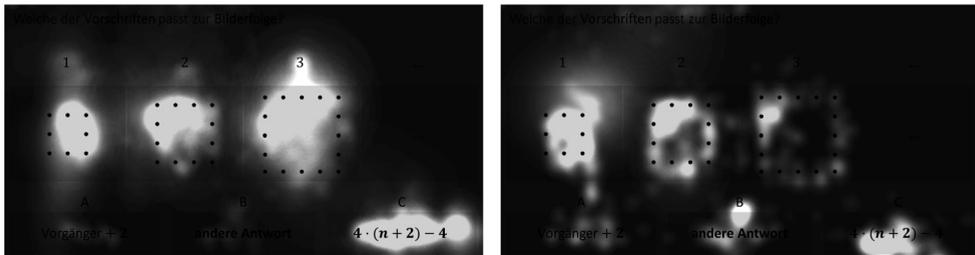
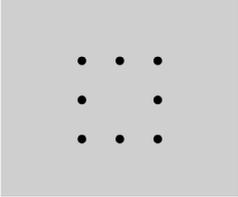
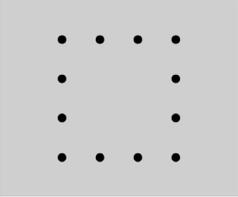
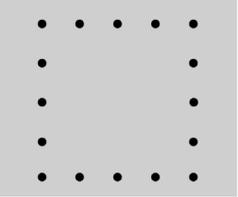


Abbildung 5: *Focus Maps* für den gesamten Bearbeitungszeitraum der Bilderfolge aus Tab.1 mit den Begabten (links) und der Kontrollgruppe (rechts).

## 4.2 Daten aus den diagnostischen Einzelinterviews

Der folgende Ausschnitt aus einem Einzelinterview bezieht sich auf die vorhergegangene Eye-Tracking-Analyse in Abb. 5. Es soll verdeutlicht werden, wie konkrete Strategien und die ihnen zu Grunde liegenden Konzepte aufgespürt werden. Das feinanalytische Vorgehen einer begabten Schülerin einer zehnten Klasse wird exemplarisch an ihrer Bearbeitung der Bilderfolge aus Tabelle 1 im Rahmen der Aufgabe in Abbildung 6 aus Pilot 2 gezeigt (diese Bilderfolge gehört zu den komplexeren Anforderungssituationen). Antwort A stellt eine rekursive Deutung bereit, ist aber nicht korrekt, da von Schritt zu Schritt stets vier Punkte hinzukommen. Antwort C ist korrekt und verbindet Stellenwert und Bild folgendermaßen:  $n + 2$  bezeichnet die Punkteanzahl an einer Quadratseite

Welche der **Vorschriften** passt zur **Bilderfolge**?

1	2	3	...
			...
<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	
<b>Vorgänger + 2</b>	<b>andere Antwort</b>	<b><math>4 \cdot (n + 2) - 4</math></b>	

Erkläre die Beziehung deiner Antwort zur Folge!

Abbildung 6: Aufgabe aus Pilot 2

hinsichtlich der Stelle. Jedes Quadrat hat vier Seiten ( $4 \cdot (n + 2)$ ), wobei aber die Ecken doppelt gezählt werden und deshalb einmal subtrahiert werden müssen ( $4 \cdot (n + 2) - 4$ ).

Während Julia beim Eye-Tracking-Experiment mehr als dreieinhalb Minuten investiert bis sie sich für Antwort C entscheidet, betrachtet sie Antwort A in dieser gesamten Zeit extrem kurz und schließt diese schnell aus. Sie erklärt dabei ihre Wahl von C beim Eye-Tracking (E) so:

- E1 J: Weil, wenn man das so umformt, dass man nur noch vier plus vier raushat, also vier  
 E2 mal zwei minus vier, dann hat man für jede Seite sozusagen, also vier Seiten hat jedes  
 E3 Quadrat, viermal, und dann noch sozusagen ein Punkt zusätzlich, also plus vier für  
 E4 jede Seite nochmal, ein Punkt zusätzlich und dann erhält man immer dieses Quadrat.

Da Julia den vorgegebenen Term nicht unmittelbar in der Bilderfolge wiederfindet, wählt sie strategisch einen Weg über die Umformungsgleichheit zwischen den Termen  $4 \cdot (n + 2) - 4$  und  $4 \cdot n + 4$  (vgl. E1). Das heißt, dass sie den Term vereinfacht, um ihn dann für die Bilderfolge zu deuten. Sie nutzt dazu die Eigenschaft, dass jedes Quadrat vier gleiche Seiten besitzt (vgl. E2). Dass sie ein Muster der Bilderfolge dabei im Allgemeinen betrachtet, wird durch ihre sprachlichen Festlegungen „für jede Seite“, „jedes Quadrat“ (E2) und „dann erhält man immer dieses Quadrat“ (E4) deutlich. Dabei kommt ebenfalls ihre tragfähige fachsprachliche Verwendung mathematisch-geometrischer Begriffe zum Vorschein. Im diagnostischen Interview (D) reflektiert sie ihre Wahl und stützt ihre Betrachtungsweise mit konkreten Handlungen am Material:

D1 J: Dann hatte ich die so umgeformt, dass eben vier plus vier da rausgekommen ist und zwar, weil ich  
 D2 hatte mir hier das Quadrat sozusagen so vorgestellt (zeichnet Trennstriche in das Punktequadrat, vgl.  
 D3 Abb. 7), dass das sozusagen aus vier Teilen besteht. Und dann hat man immer plus vier, ist dann ja  
 D4 in vier Teile aufgeteilt, also immer ein Punkt hier weggenommen (zeigt auf den Punkt in der oberen  
 D5 rechten Ecke des Bildes und kreist ihn ein) und das könnte man jetzt natürlich auch bei jedem  
 D6 anderen machen (kreist in jedem der zuvor abgetrennten Teilstücke einen äußeren Punkt ein). Dann  
 D7 hat man eben noch drei Punkte und das ist auch wieder mal vier, weil es vier Seiten hat.

Julia betrachtet nicht die gesamte Seitenlänge des Quadrats, sondern verkürzt zunächst an jeder Seite um je einen Punkt, der zur nächsten Seite des Quadrats gehört (vgl. D1-3). Von diesen fokussierten vier Strecken mit je vier Punkten kapselt sie durch Einkreisen erneut jeweils einen Punkt ab, die zusammen zu den festen vier ihres umgeformten

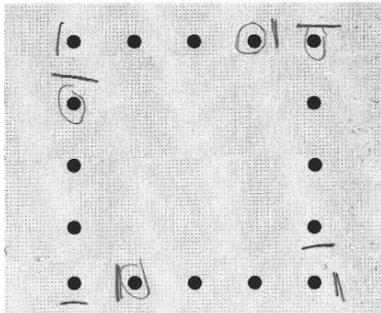


Abbildung 7: Julias Bearbeitung der Bilderfolge im diagnostischen Interview

Terms gehören (vgl. D3-6). Übrig bleibt dann an jeder Seite des Quadrats die Anzahl, die zur Stelle des Bildes gehört; an der dritten Stelle drei Punkte (vgl. D6-7; vgl. Abb. 7). Dadurch erhält sie eine explizite Verallgemeinerung der Bilderfolge. Hier zeigt sich zum einen, dass sie die variablen und festen Teile ihres Terms als Bestandteile des Musters der Bilderfolge tragfähig zuweisen kann und zum anderen, dass ihr ein zusätzliches strategisches Handeln zur Verfügung steht, welches ihr erlaubt über den kleinen Umweg der Umformungsgleichheit den Darstellungswechsel zwischen der Bilderfolge und der vereinfachten formalen Vorschrift zu vollziehen. Dabei wird sowohl sprachlich, als auch mathematisch ihr

Zugriff bezogen auf eine algebraische Strukturierungskompetenz deutlich: „dass das sozusagen aus vier Teilen besteht“ (D3), die sie so aneinandergelegt betrachtet, dass der Umfang eines Quadrats entsteht (vgl. D6-7).

Spannend ist darüber hinaus, dass im Interview ebenso ergründet werden kann, warum sie sich im Eye-Tracking-Experiment schnell gegen Antwort A entschieden hatte:

D8 I: Hast du dir auch Antwortmöglichkeit A angesehen?

D9 J: Vorgänger plus 2 [...] das ging ja schon von vornherein nicht, weil hier (zeigt auf die Bilderfolge) ja nicht nur immer zwei Punkte hinzugefügt worden sind. Also das wäre dann ja so als  
 D10 würde man immer hier (zeigt auf die rechte und linke Seite des Quadrats im ersten Punkt-  
 D11 bild) nur einen Punkt sozusagen dazu malen. Das wäre ja dann kein Quadrat geworden.

An dieser Stelle zeigt sich eine enorme Leistung hinsichtlich des schnellen Hineinsehens von Strukturen. Sie spaltet die zur rekursiven Vorschrift (Vorgänger + 2) hinzukommenden zwei Punkte so auf, dass sie gedanklich jeweils einen rechts und links an das Bild (an der ersten Stelle) malt und argumentiert, dass daraus kein Quadrat im nächsten Bild entstehen kann (vgl. D10-12). Dass sie dieses Vorgehen nicht nur zwischen zwei Punktbildern, sondern verallgemeinert an der gesamten Bilderfolge sieht, wird durch ihre

sprachliche Wiederholung „immer“ (D10) deutlich. Bei einer Ergänzung eines Punktequadrats um je einen Punkt an zwei gegenüberliegenden Seiten entsteht ein Rechteck. Sie benötigt aber keinen Blick auf die gesamte Bilderfolge, sondern schließt schon vom ersten zum zweiten Bild aus, dass diese Vorschrift nicht trägt: „das ging ja schon von vornherein nicht“ (D9 und vgl. Handlung in D11). Dies zeigt, dass ihr bereits ein Gegenbeispiel zum Ausschluss genügt. Dieses Potenzial im Umgang mit Punktmustern – die rein rekursive Vorschrift über die geschickte Objekterfassung eines Quadrats auszuschließen – war auf Basis ihrer Blickbewegungsmessung zu dieser Aufgabe noch nicht interpretierbar, sodass mit dem Interview weitere relevante Erkenntnisse zum Vorschein kommen.

Insgesamt soll dieser Einblick in das Interviewmaterial exemplarisch zeigen, dass das diagnostische Einzelinterview die durch das Eye-Tracking erfassten Daten sowohl inhaltlich stützt, als auch um weitere Interpretationen individueller Begründungs- und Handlungsmuster am konkreten Material ergänzt. Es zeigen sich aber auch Beschränkungen, die zu weiteren Modifikationen im Experimentdesign führen. Abschließend werden diese perspektivisch umrissen.

## 5 Erste Ergebnisse und Forschungsperspektiven

Die ersten beiden Pilotphasen haben bereits interessante Befunde hervorgebracht: Es hat sich eine deutliche Tendenz abgezeichnet, dass die begabten Lernenden die explizite Lösungsstrategie wählen. Dies belegen die im Vergleich regelmäßigeren und zielgerichteteren Wahrnehmungs- und Bearbeitungsmuster sowie die sprachlichen Begründungen. Ebenfalls konnte den ersten Ergebnissen entnommen werden, dass sprachliche Informationen für die Fokusgruppe weder eine Hürde noch eine für die gestellte Aufgabe relevante und zentrale Informationsquelle darstellen. Es hat sich jedoch auch gezeigt, dass das Design weiterentwickelt werden muss. Dazu sollen bspw. die mathematisch-konzeptuellen Anforderungen zum Zweck detaillierterer Einsichten in Potenziale und Hürden der verglichenen Gruppen kleinschrittiger gestaltet werden. Die Entscheidung basiert auf der Beobachtung einer Überforderung der Kontrollgruppe mit dem bisherigen Aufgabenformat. Dies erschwert den intendierten Vergleich der Lösungsstrategien (vgl. z.B. Abb. 3 & 4). Die Stimuli (vgl. z.B. Abb. 6) werden insofern angepasst, als dass der Darstellungswechsel zunächst an Einzelbildern (vgl. z.B. Abb. 7) hin zu einer arithmetischen Verallgemeinerung erfolgt, bevor dieser an Bilderfolgen hin zu formalen, verallgemeinerten Vorschriften eingefordert wird. Mit derartigen und weiteren Modifikationen versprechen wir uns ein Design, das belastbare Befunde zu den Forschungsfragen liefert.

Mittels der Grundlagenforschung zur Schnittstelle zwischen Sprache und Mathematik beim Strukturieren und Verallgemeinern im Sinne algebraischen Denkens – insbesondere beim anspruchsvollen Darstellungswechsel – sollen durch eine Methodenkombination aus Eye-Tracking und diagnostischen Interviews tiefe Einsichten in die Besonderheiten von Bearbeitungspotenzialen begabter Lernender erhoben werden. Darauf aufbauend werden geeignete Lehr-/Lernarrangements für mathematisch und sprachlich begabte Schülerinnen und Schüler entwickelt. Die forschungsbasierten Erkenntnis-

se und weiter entwickelten Konzepte werden auf universitärer Ebene in Seminaren im Sinne DoProfILs implementiert, um die angehenden Lehrkräfte für die Heterogenitätsdimension der Begabung zu sensibilisieren und sie geeignete Formate für die Schulpraxis erproben zu lassen.

## Literatur

- Behrensen, B. & Solzbacher, C. (2016). *Grundwissen Hochbegabung in der Schule*. Weinheim und Basel: Beltz-Verlag.
- Benölken, R. (2011). *Mathematisch begabte Mädchen – Untersuchungen zu geschlechts- und begabungsspezifischen Besonderheiten im Grundschulalter*. Münster: WTM-Verlag.
- Benölken, R. (2014): Begabung, Geschlecht und Motivation – Erkenntnisse zur Bedeutung von Selbstkonzept, Attribution und Interessen als Bedingungsfaktoren für die Identifikation mathematischer Begabungen. *Journal für Mathematik-Didaktik* 35 (1), S. 129–158.
- Bente, G. (2004). Erfassung und Analyse des Blickverhaltens. In R. Mangold, P. Vorderer & G. Bente (Hrsg.), *Lehrbuch der Medienpsychologie* (S. 297–324). Göttingen: Hogrefe.
- Blake, C. (2013). Eye-Tracking. Grundlagen und Anwendungsfelder. In W. Möhring & D. Schütz (Hrsg.), *Handbuch standardisierter Erhebungsverfahren in der Kommunikationswissenschaft* (S. 367–387). Wiesbaden: Springer Fachmedien.
- Bundesministerium für Bildung und Forschung (2015). *Begabte Kinder finden und fördern. Ein Wegweiser für Eltern, Erzieherinnen und Erzieher, Lehrerinnen und Lehrer*. Paderborn: Bonifatius GmbH.
- Confrey, J. & Smith, E. (1991). A framework for functions: Prototypes, multiple representations, and transformations. In R. Underhill (Hrsg.), *Proceedings of the 13th Annual Meeting of PME-NA*.
- Cooper, T.J. & Warren, E. (2008). The effect of different representations on Years 3 to 5 students' ability to generalize. *ZDM Mathematics Education* 40, S. 23–37.
- Dietrich, R. & Gerwien, J. (2017). *Psycholinguistik – eine Einführung* (3. Aufl.). Stuttgart: J. B. Metzler Verlag.
- Feger, B. & Prado, T. M. (1998). *Hochbegabung: Die normalste Sache der Welt*. Darmstadt: Primus-Verlag.
- Flick, U. (2009). *Qualitative Sozialforschung. Eine Einführung* (2. Aufl.). Hamburg: Rowohlt.
- Fritzlar, T. (2013). Mathematische Begabungen (im jungen Schulalter). In G. Greefrath, F. Käpnick & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013*, S. 45–52.
- Gardner, H. (1983). *Frames of mind: The theory of multiple intelligences*. New York: Basic Books.
- Holling, H. & Kanning, U.P. (1999). *Hochbegabung: Forschungsergebnisse und Fördermöglichkeiten*. Göttingen: Hogrefe.
- Holmqvist, K., Nyström, M., Andersson, R., Dewhurst, R., Jarodzka, H. & van de Weijer, J. (2011). *Eye Tracking. A comprehensive guide to methods and measures*. (First published in paperback). Oxford: Oxford University Press.
- Hußmann, S. & Schacht, F. (2015). Fachdidaktische Entwicklungsforschung in inferentieller Perspektive am Beispiel von Variable und Term. *Journal für Mathematikdidaktik* 35 (1), S. 105–134.
- Hußmann, S., Schacht, F. & Schindler, M. (angenommen). Tracing conceptual development in mathematics. Towards an epistemological theory based on inferentialism. Angenommen bei: *Mathematics Education Research Journal*.
- Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. & Ng, S. F. (2016). Early Algebra. Research into its Nature, its Learning, its Teaching. *13th International Congress on Mathematical Education*, Springer.
- Konrad, K. (2010). Lautes Denken. In G. Mey & K. Mruck (Hrsg.), *Handbuch Qualitative Forschung in der Psychologie* (S. 476–490). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.
- Lamnek, S. (2005). *Qualitative Sozialforschung* (4. Aufl.). Weinheim [u.a.]: Beltz.

- Lannin, J. (2005). Generalization and Justification. The Challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning* 7 (3), S. 231–258.
- Lengnink, K. & Prediger, S. (2000). Mathematisches Denken in der Linearen Algebra. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 32 (4), S. 111–122.
- Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *mathematik lehren* 103, S. 8–11.
- Matter, B. (2017). *Lernen in heterogenen Lerngruppen. Erprobung und Evaluation eines Konzepts für den jahrgangsgemischten Mathematikunterricht*. Wiesbaden: Springer.
- Meyer, A. (2015). *Diagnose algebraischen Denkens. Von der Diagnose- zur Förderaufgabe mithilfe von Denkmustern*. Wiesbaden: Springer.
- Meyer, M. & Prediger S. (2012). Sprachenvielfalt im Mathematikunterricht – Herausforderungen, Chancen und Förderansätze. *Praxis der Mathematik in der Schule* 54 (45). S. 2–9.
- Meyer, M. & Tiedemann, K. (2017). *Mathematik und Sprache*. Berlin: Springer Spektrum.
- Preckel, F. & Baudson, T. G. (2013). *Hochbegabung: Erkennen, Verstehen, Fördern*. München: Beck.
- Preckel, F. & Brüll, M. (2008). *Intelligenztests*. München: Ernst Reinhardt.
- Prediger, S. (2013). Darstellungen, Register und mentale Konstruktion von Bedeutungen und Beziehungen – Mathematikspezifische sprachliche Herausforderungen identifizieren und bearbeiten. In M. Becker-Mrotzek, K. Schramm, E. Thürmann & H. J. Vollmer (Hrsg.), *Sprache im Fach. Sprachlichkeit und fachliches Lernen* (S. 167–183). Münster: Waxmann.
- Prediger, S. & Krägeloh, N. (2015). “x-arbitrary means any number, but you do not know which one” – The epistemic role of languages while constructing meaning for the variable as generalizers. In A. Halai & P. Clarkson (Hrsg.). *Teaching and Learning Mathematics in Multilingual Classrooms: Issues for Policy, Practice and Teacher Education* (S. 89–108). Rotterdam: Sense.
- Prediger, S. & Schnell, S. (2017). Mathematics Enrichment for All – Noticing and Enhancing Mathematical Potentials of Underprivileged Students as An Issue of Equity. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education* 13 (1), S. 143–165.
- Prediger, S. & Wessel, L. (2011). Darstellen – Deuten – Darstellungen vernetzen. Ein fach- und sprachintegrierter Förderansatz für mehrsprachige Lernende im Mathematikunterricht. In S. Prediger & E. Özdil (Hrsg.), *Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit – Stand und Perspektiven der Forschung und Entwicklung in Deutschland* (S. 163–184). Münster: Waxmann.
- Sternberg, R. J. (2000). Giftedness as developing expertise. In K. A. Heller, F. J. Mönks, R. J. Sternberg & R. F. Subotnik (Hrsg.), *International handbook of giftedness and talent* (2. Aufl., S. 55–66). New York: Elsevier Science Publishers.
- Ulm, V. (2009). Mathematische Begabung und ihre Förderung im Unterricht. *Profil* 16 (12), S. 31–39.
- Vock, M. & Preckel, F. (2013). *Hochbegabung: ein Lehrbuch zu Grundlagen, Diagnostik und Fördermöglichkeiten*. Göttingen et al.: Hogrefe.
- Vygotsky, L. S. (1964). *Denken und Sprechen*. Berlin: Akademie-Verlag.